

[www.tunisie-etudes.info](http://www.tunisie-etudes.info)

Ce document a été téléchargé depuis  
[www.tunisie-etudes.info](http://www.tunisie-etudes.info)

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :

<http://www.twitter.com/TunisieEtudes>

Notre page FaceBook :

<http://www.facebook.com/TunisieEtudes>

The screenshot shows the homepage of Tunisia-études.info. At the top, there is a navigation bar with the site name 'TUNISIE-ETUDES.INFO' and three menu items: 'Tous les documents', 'BAC', and 'Avis de co'. Below this is a 'Newsflash' section with a blue background and a decorative swirl. The text in the newsflash reads: 'Tunisie-etudes.info vous aide dans votre préparation pour le concours de l'ENA. Documents de préparation pour le concours national tunisien de l'ENA'. Below the newsflash is a 'Home' button. On the left side, there is a 'Main Menu' with a list of links: Home, News, Web Links, Documents, Primaire, Collège, Secondaire, and Supérieur. The main content area features a 'BIENVENUE SUR TUNISIE-ETUDES.INFO' section. It includes a sub-section 'Avis de concours' written by 'Administrateur' on 'Mercredi, 20 Janvier 2010 08:47'. The text of the announcement says: 'Accéder aux derniers avis de concours publier par les entreprises tunisiennes au jour le jour directement sur votre site'. There is a link 'Avis de concours en direct'. At the bottom of this section, there are links for 'Accès aux documents' and 'Retrouvez nous sur FaceBook'.

Merci d'avoir choisi [www.tunisie-etudes.info](http://www.tunisie-etudes.info)  
Bonne lecture et bon travail

[www.tunisie-etudes.info](http://www.tunisie-etudes.info) – [www.algointro.info](http://www.algointro.info)

# Annexe 1 : Rudiments d'Algèbre Matricielle

1	DEFINITIONS DE BASE .....	2
1.1	NOTION DE MATRICE .....	2
1.2	VECTEUR-COLONNE .....	2
1.3	VECTEUR-LIGNE .....	2
1.4	SOUS-MATRICE .....	2
2	TYPES DE MATRICES .....	3
2.1	MATRICE CARREE .....	3
2.2	MATRICE DIAGONALE .....	3
2.3	MATRICE SCALAIRE .....	3
2.4	MATRICE IDENTITE OU MATRICE UNITAIRE.....	3
2.5	MATRICE SYMETRIQUE.....	4
2.6	MATRICE NULLE OU ZERO.....	4
2.7	MATRICES TRIANGULAIRES.....	4
3	OPERATIONS SUR LES MATRICES.....	4
3.1	EGALITE DES MATRICES .....	4
3.2	ADDITION ET SOUSTRACTION DES MATRICES .....	4
3.3	MULTIPLICATION D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE .....	5
3.4	MULTIPLICATION DES MATRICES .....	5
3.5	PROPRIETES DE LA MULTIPLICATION DES MATRICES .....	6
3.6	TRANSPOSITION DES MATRICES.....	7
3.7	PROPRIETES DE LA TRANSPOSITION D'UNE MATRICE .....	7
3.8	MATRICE INVERSE D'UNE MATRICE CARRE.....	7
3.9	PROPRIETES D'UNE MATRICE INVERSE .....	8
3.10	MATRICE ORTHOGONALE .....	8
4	DETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE .....	8
4.1	EVALUATION D'UN DETERMINANT .....	8
4.2	PROPRIETES DES DETERMINANTS.....	9
4.3	APPLICATION AUX SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES .....	9
4.3.1	Formulation matricielle .....	9
4.3.2	Cas d'une matrice régulière .....	9
4.3.3	Cas d'une matrice singulière.....	9

# 1 DEFINITIONS DE BASE

## 1.1 Notion de matrice

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres ou d'éléments disposés en lignes et en colonnes. Plus exactement, une matrice d'ordre, ou de dimension, ou de format  $m$  sur  $n$ , noté  $(m \times n)$ , est une série de  $(m \times n)$  éléments rangés en  $m$  lignes et  $n$  colonnes.

On utilise souvent des lettres majuscules pour désigner une matrice.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

où :

$a_{ij}$  est l'élément inscrit sur la  $i^{\text{e}}$  ligne et la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $A$ .

$[a_{ij}]$  est une expression abrégée de  $A$ .

L'ordre ou la dimension d'une matrice est souvent écrit sous la matrice.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .  $A$  est une matrice de dimension  $(2 \times 3)$ .  $a_{21} = 3$  est l'élément (ou encore le coefficient) de la  $2^{\text{e}}$  ligne et la  $1^{\text{e}}$  colonne est 3.

## 1.2 Vecteur-colonne

Une matrice comportant  $m$  lignes et une seule colonne s'appelle un vecteur-colonne de dimension  $m$ .

Exemple :

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ est un vecteur-colonne de dimension } 3.$$

## 1.3 Vecteur-ligne

Une matrice comportant une seule ligne et  $n$  colonnes s'appelle un vecteur-ligne de dimension  $n$ .

Exemple :

$$x = [2 \quad 4 \quad -6 \quad 1] \text{ est vecteur-ligne de dimension } 4.$$

## 1.4 Sous-matrice

Soit une matrice  $A$  d'ordre  $(m \times n)$ .

Si on détruit toutes les lignes, sauf  $r$  d'entre elles, et toutes les colonnes, sauf  $s$  d'entre elles alors la matrice résultante d'ordre  $(r \times s)$ , est une sous matrice de  $A$ .

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 8 & 6 & 9 & 1 \\ 11 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Si on supprime la troisième et la quatrième ligne et la quatrième colonne, on}$$

$$\text{aura : } B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ qui est une sous matrice de } A.$$

## 2 TYPES DE MATRICES

### 2.1 Matrice carrée

Une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes est une matrice carrée.  
Pour une matrice carrée  $A$ , sa *trace* est la somme de ses coefficients diagonaux, notée  $\text{Tr}(A)$ .

Exemple :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  est une matrice carrée d'ordre 2.

$$\text{Tr}(A) = 1 + 4 = 5$$

### 2.2 Matrice diagonale

Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux formant sa diagonale principale (celle qui joint le coin supérieur gauche au coin inférieur droit), est appelée matrice diagonale.

$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$  est une matrice diagonale d'ordre  $n$ .

Remarque :

Certains éléments sur la diagonale peuvent être nuls.

Exemple :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$  est une matrice diagonale d'ordre 3.

### 2.3 Matrice scalaire

Une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les éléments sont égaux.

Exemple 1 :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Exemple 2 :

Dans le cas du modèle linéaire de régression, on peut donner l'exemple de la matrice variance-

covariance des erreurs :  $\text{var-cov}(e) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix}$ .

### 2.4 Matrice identité ou matrice unitaire

Une matrice identité ou matrice unité ou encore matrice unitaire est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont égaux à 1. Elle est notée  $I$  (ou encore  $I_n$  avec  $n$  la dimension de la matrice). C'est un cas particulier de la matrice scalaire.

Exemple :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  est la matrice unité d'ordre 3. On la note  $I_3$ .

## 2.5 Matrice symétrique

Une matrice carrée dont les éléments situés au dessus de la diagonale principale sont l'exact reflet de ceux situés sous la diagonale principale est une matrice symétrique.

Cette dernière est aussi une matrice dont la transposée est égale à elle-même :  $A = A'$ .

Ceci signifie que l'élément  $a_{ij}$  de  $A$  est égal à l'élément  $a_{ji}$  de  $A'$ .

### Exemple :

La matrice de variances et covariances de l'erreur  $\varepsilon$  dans le cas de modèle de régression multiple,

$$\Omega_{\varepsilon} = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_n\varepsilon_n) \end{bmatrix}.$$

## 2.6 Matrice nulle ou zéro

Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle. On peut la noter 0.

De même, un vecteur-ligne ou colonne composé uniquement d'éléments nuls est un vecteur nul.

## 2.7 Matrices triangulaires

Une matrice triangulaire supérieure (Upper triangular matrix, U) :  $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$

Matrice triangulaire inférieure (Lower triangular matrix, L) :  $L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}$

# 3 OPERATIONS SUR LES MATRICES

## 3.1 Egalité des matrices

Deux matrices  $A$  et  $B$  sont égales si elles ont le même ordre ( $m \times n$ ) et si leurs éléments correspondants aux mêmes emplacements sont égaux :  $a_{ij} = b_{ij}$ .

### Exemple :

$$A_{(2 \times 3)} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{4} & 6 \\ 3 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B_{(2 \times 3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{36}{6} \\ 3 & 4 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ sont égales.}$$

N.B.

$$(2 \ 0,5) \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$(2 \ 0,5) \neq (0,5 \ 2)$$

## 3.2 Addition et soustraction des matrices

Soient  $A = [a_{ij}]$  et  $B = [b_{ij}]$  deux matrices de même dimension ( $m \times n$ ).

La somme  $A + B$  est une matrice  $C = [c_{ij}]$  d'ordre ( $m \times n$ ) obtenue par :  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

La différence  $A - B$  est définie de manière analogue.

Remarque :

On appelle matrice opposée de la matrice  $A$  la matrice, notée  $-A$ , obtenue en remplaçant chaque terme de  $A$  par son opposé.

Généralisation :

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices de même dimension ( $m \times n$ ).

L'addition est commutative :  $A + B = B + A$

L'addition est associative :  $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

Si  $A + B = C$  alors  $A = C - B$

Si  $0$  est la matrice nulle de dimension ( $m \times n$ ) alors  $A + 0 = 0 + A = A$ .

Exemple :

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ On a : } A + B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 9 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } -B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -1 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

### 3.3 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice de dimension ( $m \times n$ ) et  $\lambda$  un scalaire (un nombre réel).

Le produit de la matrice  $A$  par le scalaire  $\lambda$  est la matrice de dimension ( $m \times n$ ), notée  $\lambda A$ , obtenue en multipliant par  $\lambda$  chaque élément de  $A$ .

On aura :  $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$

Généralisation : Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de même dimension ( $m \times n$ ) et  $\lambda$  et  $\gamma$  deux scalaires.

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \gamma)A = \lambda A + \gamma A$$

$$\lambda(\gamma A) = \lambda\gamma A$$

Exemple 1 :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = 3 \text{ alors } \lambda A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 24 & 12 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = 3(A + 5B) - 16B.$$

$$\text{Alors } C = 3(A + 5B) - 16B = 3A + 15B - 16B = 3A - B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 24 & 12 \\ 21 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 23 & 7 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.4 Multiplication des matrices

Soient  $A = [a_{ij}]$  une matrice de dimension ( $m \times n$ ) et  $B = [b_{ij}]$  une matrice de dimension ( $n \times p$ ).

Le produit  $A \times B$  (exactement dans cet ordre) est une matrice  $C = [c_{ij}]$  de dimension ( $m \times p$ ), telle que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, p \end{cases}.$$

C'est la règle de multiplication ligne par colonne.

Exemple :

Soient les deux matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(3 \times 2) + (4 \times 3) + (7 \times 6)] & [(3 \times 1) + (4 \times 5) + (7 \times 2)] \\ [(5 \times 2) + (6 \times 3) + (1 \times 6)] & [(5 \times 1) + (6 \times 5) + (1 \times 2)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 37 \\ 34 & 37 \end{pmatrix}$$

### 3.5 Propriétés de la multiplication des matrices

La multiplication de matrices n'est pas nécessairement commutative, c'est-à-dire, quand les dimensions de deux matrices A et B permettent le calcul de  $A \times B$ , elles ne permettent pas nécessairement le calcul de  $B \times A$ .

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ mais en aucun cas on peut calculer } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où les calculs sont possibles, les matrices qui en résultent du produit des deux matrices  $A \times B$  et  $B \times A$  ne sont pas nécessairement égales.

Exemple :

$$(3 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (3 \ 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si A et B sont deux matrices carrées, les matrices qui en résultent du produit des deux matrices  $A \times B$  et  $B \times A$  ne sont pas nécessairement égales.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Un vecteur-ligne postmultiplié par un vecteur-colonne est un scalaire. Le nombre de colonnes du vecteur-ligne doit être égal au nombre de lignes du vecteur-colonne. Ainsi, le produit

$$(a_1 \ \dots \ a_p) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_p b_p$$

Exemple :

$$(2 \ 4 \ 6) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \times 2 + 3 \times 4 + 6 \times \sqrt{2} = 16 + 6\sqrt{2}$$

Un vecteur-colonne post multiplié par un vecteur-ligne est une matrice symétrique.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} (b_1 \ \dots \ b_p) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p b_1 & \dots & a_p b_p \end{pmatrix}$$

Une matrice post multipliée par un vecteur-colonne est un vecteur-colonne.

Un vecteur-ligne post multiplié par une matrice est un vecteur-ligne.

La multiplication de matrices est associative :

$$A(BC) = (AB)C = ABC$$

La multiplication de matrices est distributive :

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

### 3.6 Transposition des matrices

La transposée d'une matrice  $A$  d'ordre  $(m \times n)$ , notée  $A'$  (ou encore  ${}^tA$  ou  $A^T$ ), et qu'on lit  $A$  transposée, est une matrice d'ordre  $(n \times m)$ , obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de  $A$ .

La  $i^{\text{e}}$  ligne de  $A$  devient la  $i^{\text{e}}$  colonne de  $A'$ .

Exemple :

$$A_{(3 \times 2)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A'_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Le transposé d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne.

Exemple :

$$x_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow x'_{(1 \times 3)} = [2 \quad 3 \quad \sqrt{2}]$$

Le transposé d'un vecteur-ligne est un vecteur-colonne.

Exemple :

$$x_{(1 \times 4)} = [2 \quad 4 \quad -6 \quad 1] \Rightarrow x'_{(4 \times 1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 3.7 Propriétés de la transposition d'une matrice

La transposée d'une matrice transposée est la matrice d'origine :  $(A')' = A$ .

La transposée de la somme de deux matrices est la somme de leurs transposées. Ainsi, si  $A$  et  $B$  deux matrices de même dimension, alors  $C = A + B$  et  $C' = (A + B)' = A' + B'$ .

Si le produit des deux matrices  $AB$  est défini, alors  $(AB)' = B'A'$ .

Généralisation :  $(ABCD)' = D'C'B'A'$ .

La transposée d'une matrice identité  $I$  est la matrice identité elle-même. Ainsi,  $I' = I$ .

Le transposé d'un scalaire  $\lambda$  est le scalaire lui-même. Ainsi,  $\lambda' = \lambda$ .

La transposée de  $\lambda A$  est  $\lambda A'$ . Ainsi,  $(\lambda A)' = A'\lambda' = A'\lambda = \lambda A'$ .

Si  $A$  est une matrice symétrique alors  $A = A'$ .

### 3.8 Matrice inverse d'une matrice carré

Une matrice carrée  $A$  est dite inversible ou régulière s'il existe une matrice carrée  $A^{-1}$  (appelée matrice inverse) telle que :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  et  $I$  est une matrice identité de même dimension que  $A$ .

Exemple :

Pour vérifier que les matrices  $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0,8 & 1,1 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$  sont inverses l'une de l'autre.

On peut calculer le produit  $AB = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 1,1 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ .

### 3.9 Propriétés d'une matrice inverse

Une matrice n'admet pas forcément d'inverse. Si  $A^{-1}$  n'existe pas, la matrice  $A$  n'est pas inversible.  $A$  est dite singulière.

Si une matrice est inversible, alors l'inverse est unique.

La condition " $AB = I_n$ " est équivalente à la condition " $BA = I_n$ ". Mais il faut se rappeler qu'on n'a pas nécessairement  $AB = BA$ .

Si la matrice  $B$  est l'inverse de la matrice  $A$ , alors la matrice  $A$  est l'inverse de la matrice  $B$ .

On dit que les matrices  $A$  et  $B$  sont inverses l'une de l'autre.

On a :  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

On a :  $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

### 3.10 Matrice orthogonale

La matrice  $A$  est dite orthogonale si  $A^{-1} = A'$  ou encore  $A^{-1}A = A'A = I_n$ .

## 4 DETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE

### 4.1 Evaluation d'un déterminant

A chaque matrice carrée  $A$  correspond un nombre (scalaire) connu sous le nom de déterminant de la matrice et noté  $\det(A)$  ou  $|A|$ .

Une matrice d'ordre  $n$  n'a pas de valeur numérique, mais son déterminant d'ordre  $n$  est un nombre.

Le calcul de la valeur d'un déterminant est connu sous le nom d'évaluation, expansion ou réduction du déterminant.

Evaluation du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 :

Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , alors son déterminant est évalué comme suit :  $\det(A) = |A| = \underbrace{a_{11}a_{22}}_{\text{terme } n^1} - \underbrace{a_{12}a_{21}}_{\text{terme } n^2}$ .

Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , alors sa matrice inverse est :  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ .

Evaluation du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 :

Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , alors son déterminant est évalué comme suit :

$$|A| = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\text{terme } n^1} - \underbrace{a_{11}a_{23}a_{32}}_{\text{terme } n^2} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{\text{terme } n^3} - \underbrace{a_{12}a_{21}a_{33}}_{\text{terme } n^4} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{\text{terme } n^5} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{\text{terme } n^6}$$

Remarques :

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre  $n$ , possède  $n! = [1.2.3 \dots (n-3).(n-2).(n-1).n]$  termes.

Ainsi, un déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 possède  $2! = 2$  termes dans son expansion et un déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 possède  $3! = 6$  termes dans son expansion.

Chaque terme dans l'évaluation du déterminant ne contient qu'un, et un seul, élément de chaque ligne et de chaque colonne.

Le nombre d'éléments dans chaque terme est identique au nombre de lignes (ou de colonnes) de la matrice. Ainsi, un déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 possède deux éléments dans chaque terme de son expansion et un déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 possède trois éléments dans chaque terme de son expansion)

## 4.2 Propriétés des déterminants

La matrice inverse  $A^{-1}$  n'existe que si  $\det(A) \neq 0$ . Dans ce cas  $A$  est une matrice régulière.

La matrice  $A$  est singulière si  $\det(A) = 0$ .

$$\det(A') = \det(A)$$

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier,  $\det(I) = 1$  (si  $I$  est la matrice unité)

Si  $A$  est régulière,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$  puisque  $\det(AA^{-1}) = \det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$ .

Si  $A$  est orthogonale,  $\det(A) = \pm 1$  puisque  $\det(AA^t) = [\det(A)]^2 = \det(I) = 1$ .

## 4.3 Application aux systèmes d'équations linéaires

### 4.3.1 Formulation matricielle

Un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les  $a_{ij}$  sont les coefficients du système, les  $x_i$  les inconnues et les  $b_i$  les termes constants.

Un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :  $Ax = b$

$$\text{avec : } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

### 4.3.2 Cas d'une matrice régulière

Si la matrice  $A$  est régulière, on a, en multipliant à gauche par  $A^{-1}$  :  $A^{-1}Ax = A^{-1}b$

Soit :  $x = A^{-1}b$

Exemple :

Soit le système de 2 équations à 2 inconnues : 
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

On a successivement :  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  et  $b = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = [2 \times (-1)] - [3 \times 1] = -5$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -15 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soit :  $x_1 = 3$  et  $x_2 = 1$ .

### 4.3.3 Cas d'une matrice singulière

Lorsque la matrice est singulière, deux cas sont à envisager :

Système indéterminé

S'il est possible d'exprimer  $p$  équations en fonction des autres, le système admet une infinité de solutions. On peut retenir le vecteur  $x$  qui a la plus faible norme.

L'ensemble des solutions forme un sous-espace de dimension  $r = n - p$  dans l'espace de dimension  $n$ . Le nombre  $r$  est le rang de la matrice.

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Le déterminant vaut :  $1 \times 2 - 1 \times 2 = 0$ . La matrice est bien singulière.

La deuxième équation est égale à la première multipliée par 2. Il n'y a en fait qu'une seule équation :  $x_1 + x_2 = 3$ . C'est l'équation d'une droite (espace de dimension 1) dans le plan  $(x_1, x_2)$ . La matrice est de rang 1.

#### Systeme impossible

Si les équations ne peuvent pas être exprimées les unes en fonction des autres, le système n'admet aucune solution. On peut cependant calculer un vecteur  $x$  tel que la norme du vecteur  $Ax - b$  soit minimale (bien que non nulle). Ce vecteur constitue la meilleure approximation de la solution au sens des moindres carrés.

#### Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

La deuxième équation divisée par 2 donnerait  $x_1 + x_2 = 4$ , ce qui est incompatible avec la première équation. Le système n'a pas de solution.

[www.tunisie-etudes.info](http://www.tunisie-etudes.info)

Ce document a été téléchargé depuis  
[www.tunisie-etudes.info](http://www.tunisie-etudes.info)

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :

<http://www.twitter.com/TunisieEtudes>

Notre page FaceBook :

<http://www.facebook.com/TunisieEtudes>

The screenshot shows the homepage of Tunisia-études.info. At the top, there is a navigation bar with the site name 'TUNISIE-ETUDES.INFO' and three menu items: 'Tous les documents', 'BAC', and 'Avis de co'. Below this is a 'Newsflash' section with a blue background and white text, stating: 'Tunisie-etudes.info vous aide dans votre préparation pour le concours de l'ENA. Documents de préparation pour le concours national tunisien de l'ENA'. A 'Home' button is visible below the newsflash. On the left side, there is a 'Main Menu' with a list of links: Home, News, Web Links, Documents, Primaire, Collège, Secondaire, and Supérieur. The main content area features a 'BIENVENUE SUR TUNISIE-ETUDES.INFO' section with a sub-heading 'Avis de concours', written by 'Administrateur' on 'Mercredi, 20 Janvier 2010 08:47'. The text encourages users to access the latest competition notices published by Tunisian companies and provides a link to 'Avis de concours en direct'. At the bottom of this section, there are links for 'Accès aux documents' and 'Retrouvez nous sur FaceBook'.

Merci d'avoir choisi [www.tunisie-etudes.info](http://www.tunisie-etudes.info)  
Bonne lecture et bon travail

[www.tunisie-etudes.info](http://www.tunisie-etudes.info) – [www.algointro.info](http://www.algointro.info)